関数の連続性について

笹山　智司　　松井　伸也
北海道大学　　北海道情報大学

On the continuity of functions

Satoshi SASAYAMA and Shin'ya MATSUI
Hokkaido University　　Hokkaido Information University

平成25年11月

北海道情報大学紀要　第25巻　第1号別刷

〈論　文〉

関数の連続性について

笹山 智司*　松井 伸也†

On the continuity of functions

Satoshi SASAYAMA*　Shin'ya MATSUI†

要旨

数学教育における連続の扱いについて考察し，それに対する注意を与える。また極限に関連して，簡単な例を用いて数値シミュレーションの意味について解説する。

Abstract

In this article we discuss how to deal with the continuity in the education of mathematics, and give some remarks. Moreover, we also discuss on meaning of a numerical simulation using a simple example.

キーワード

数学教育，連続，微分方程式，差分方程式，近似

1.　初めに

本稿では，高校数学教育において関数の連続がどのように扱われているか，また教員は何を知っておくべきか，について議論を行う。最近では，コンピューターが普及し，誰でも容易に現象を数値シミュレーションすることが可能になった。なおここで想定する趣味レーションは，連続的な現象の離散近似である。コンピューターに計算させるアルゴリズムを構築したり，計算結果の正否を判定したりするためには，関数の性質を十分に理解していなければならない。本稿が，その理解の助けになることを願う。

本稿の構成は以下である。2 章において連続の定義について触れている。3 章では，連続を考えるために必要な無限について紹介している。紹介においては，厳密性よりも，直観的に正しいと思えるような解説を与えている。4 章において，簡単な数値シミュレーションのための近似を紹介する。

* 北海道大学　理学部非常勤講師
Part-time Lecturer, Fuculty of Science, Hokkaido University

† 北海道情報大学　情報メディア学部教授
Professor, Faculty of Information Media, HIU

なおこの本稿を通じて，$\mathbb{N}$ は自然数全体の集合，$\mathbb{Z}$ は整数全体の集合，$\mathbb{Q}$ は有理数全体の集合，$\mathbb{R}$ は実数全体の集合表す。

2.　連続の定義

関数の連続については，高校 3 年生の極限の単元において定義される。関数の極限を扱うことで，微分が定義でき，微分を用いて (不定) 積分を定義するという流れで，数学 III の一部が構成される。ここで，高校で使用される教科書にどのような定義が記載されているか挙げてみる。

定義 2.1. 関数 f が点 x_0 で連続とは，x が $x \neq x_0$ を満たしつつ，限りなく x_0 に近づくとき，$f(x)$ が $f(x_0)$ に限りなく近づくこと。

定義 2.1 による記述が圧倒的に多い。確かに直観的に連続を理解するには，これで十分とされている。また，少数ではあるが，次のような定義も見られる。(例えば，[1])

定義 2.2. 関数 f が，点 x_0 で連続とは，任意の点列 $x_n \to x_0$ as $n \to 0$ に対して，$f(x_n) \to f(x_0)$ as $n \to 0$ が成立すること。

定義 2.1 と定義 2.2 の違いは，変数 x の x_0 へ

の近づき方の違いにある。定義 2.1 では，x 軸上を連続的に移動しているイメージに対して，定義 2.2 では，離散的に移動しているイメージになる。定義 2.2 は，実際に計算できるもの・図示できるものを元に，定義していると考えられる。

これらの定義は，定義として不十分な点があることはよく知られている。それは，高校での数学教科において，点が近づくことを定義しないため，定義として閉じていないことである。また，直観的にグラフや図で連続を理解させてしまうと，十分条件が必要条件変わってしまうという弊害もある。具体的には，グラフが繋がっていれば連続であるは正しいが，連続であればグラフは繋がっているはずと誤解されることである。グラフが繋がっているということをどのように厳密に定義しなければならないかは，触れられることはない。連続を取り扱う初期においては，連続の概念を素朴に数式で書き表そうと試みられたときと同様の理論を構築していくことは，問題ないのだが，慣れてきたときには，もう一度ある程度厳密なものも取り扱わなければ，連続の定義は正しく理解されない。
数学における連続の定義は，$\varepsilon - \delta$ 論法を用いて記述される。

定義 2.3. 関数 $f : \mathcal{D}(f) \to \mathbb{R}$ が，点 $x_0 \in \mathcal{D}(f)$ において連続とは，

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0 \text{ such that}$$
$$|x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$$

が成立することをいう。ここで，$\mathcal{D}(f)$ とは，関数 f の定義域を表す。

$\varepsilon - \delta$ 論法は，数学科においては，大学の初年度または 2 年度には必ず取り扱われる。また，教科書教授資料においても $\varepsilon - \delta$ 論法は記述されている。教科書教授資料とは，検定教科書を作成している出版社が，教科書の内容に如何に教えるべきか，何を教えるべきかを出版社自身が解説している出版物である。これは，数 III を教科科目として担当するものは，数学の厳密な定義を理解し，かつ使うことができることを出版社が暗に要求しているように思える。(例えば，[3]) 定義を抽象化することにより，直観による間違いや事実を知らなければ思いつかない例を見つけることができる。しかし，抽象的な表現に慣れていない場合，何を意図しているのか理解できない。この定義 2.3 により，直観では，想像されないであろう連続の例が挙げられる。

例 2.1. 次の関数は，$x = 0$ でのみ連続である。

$$f(x) = \begin{cases} x & x \in \mathbb{Q} \\ 0 & x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \end{cases}$$

この例の特徴は，実数内の 2 つの無限を用いて構成されている。次の章で簡単にその 2 つの無限について，考察する。

3. 可算集合と非可算集合

最も想像しやすい無限を持つ集合は，自然数 $\mathbb{N}$ である。$\mathbb{N}$ が，最大元を持たないことは容易に理解できる事実である。集合 A の元の個数を数えるという作業は，写像 $g : \mathbb{N} \to A$ を考察することに他ならない。

例 3.1. 集合 $A = \{a, b, c, d, e\}$ の元の個数 ($\#A$ と書くことにする) は，$\#A = 5$ は誰でも分かる。この数えるという過程は，

$1 \to a$ (1 つ目が a)　$2 \to b$ (2 つ目が b)
$3 \to c$ (3 つ目が c)　$4 \to d$ (4 つ目が d)
$5 \to e$ (5 つ目が e)

もちろん $\mathbb{N}$ の元に対応させる順番は任意でよい。対応が完了した時に，使用した $\mathbb{N}$ の最大元が個数になる。

この考え方は，小学校 1 年生の算数に表れる題材である。その題材とは，2 つの集合のどちらの個数が多いかを $\mathbb{N}$ を用いずに比較する際，線で結んでどちらの元が余るかを確認する作業である。この単純な作業を無限集合に行うことによって，無限の種類を確認することが出来る。そのため，$\mathbb{N}$ の元の個数を $\#\mathbb{N} = \aleph_0$ と書くことにする。

例 3.2. 整数 $\mathbb{Z}$ の元の個数は，$\#\mathbb{Z} = \aleph_0$ である。次のように $\mathbb{N}$ と対応させることで，直観的に理解できる（図 **1**)。
具体的には，写像 $g : \mathbb{N} \to \mathbb{Z}$ は

$$g(x) = \begin{cases} \dfrac{x}{2} & \text{ただし } x \text{ は偶数} \\ -\dfrac{x-1}{2} & \text{ただし } x \text{ は奇数} \end{cases}$$

と書ける。

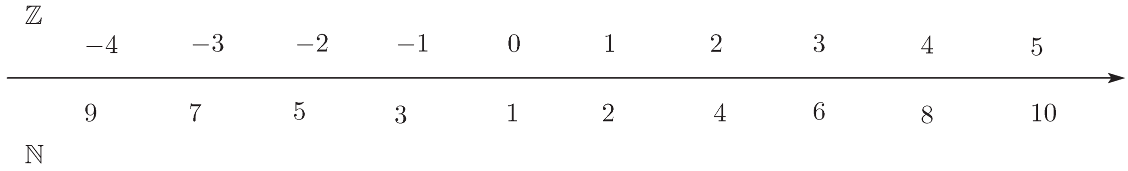

図 **1** ℕ と ℤ の対応の付け方の例

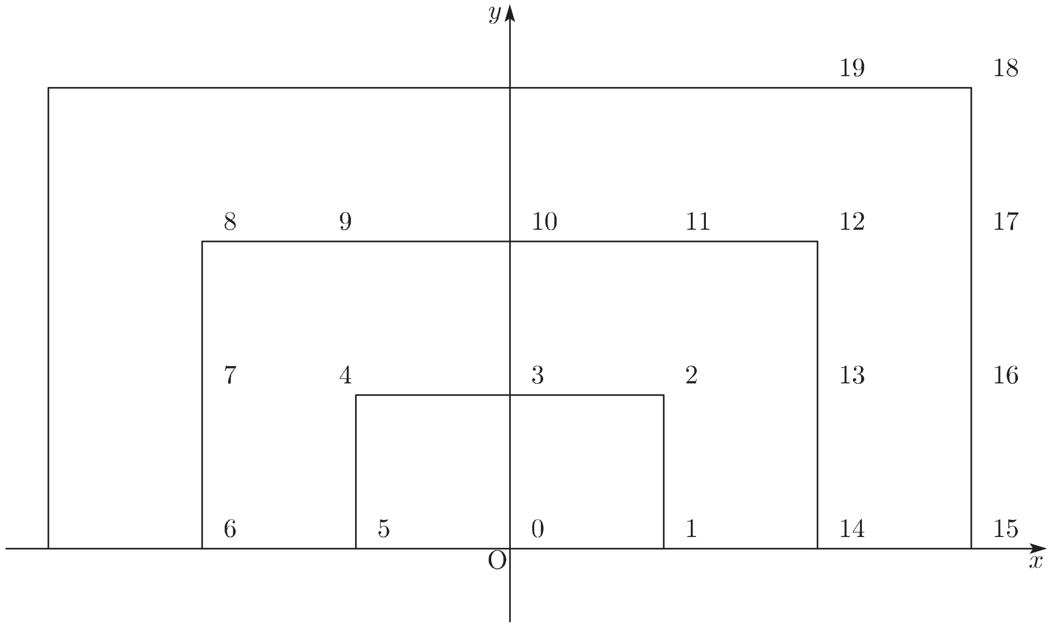

図 **2** ℕ と ℚ の対応の付け方の例

例 **3.3.** 有理数 $\mathbb{Q}$ の個数は，$\#\mathbb{Q}=\aleph_0$ である。$\mathbb{Q}$ の定義から，数直線上ではなく，平面 $\mathbb{R}^2$ 上の格子点を考えることで直観的に理解できる。有理数の定義は，分子は $\mathbb{Z}$，分母は $\mathbb{N}$ であり，かつ分母と分子は互いに素，つまり既約分数で書ける実数である。このことから，次のような写像を考えることが出来る。$x\in\mathbb{Z}, y\in\mathbb{N}$ として，

$$\mathbb{Q}\ni a=\frac{x}{y}\mapsto(x,y)\in\mathbb{R}^2$$

(x,y) は，格子点の座標である。この格子点は，として，$\mathbb{N}$ との対応を考えることができる。図 **2** では，幾分数え過ぎ (互いに素でないものや分母が 0 になるものにも自然数を対応させている) であるが，$\mathbb{N}$ から $\mathbb{Q}$ への写像が定義出来ることが分かる。

例 **3.4.** 実数 $\mathbb{R}$ の元の個数は，$\#\mathbb{R}\neq\aleph_0$ である。これを示すには，背理法と対角線論法を用いる。まず，$\#\mathbb{R}=\aleph_0$ であったと仮定すると，

$$\begin{array}{ccl}
\mathbb{N} & \to & \mathbb{R}\\
1 & \mapsto & 0.a_1a_2a_3a_4a_5a_6\cdots\\
2 & \mapsto & 0.b_1b_2b_3b_4b_5b_6\cdots\\
3 & \mapsto & 0.c_1c_2c_3c_4c_5c_6\cdots\\
4 & \mapsto & 0.d_1d_2d_3d_4d_5d_6\cdots
\end{array}$$

のように自然数と 10 進数表示された実数に対応があることになる。ここで，10 進数表示は，一意になるよう同値なものはまとめておく。このとき，対角線に並んである数に注目して，

$$\alpha=0.a'_1b'_2c'_3d'_4\cdots$$

となる数 α を考える。ここで，$a_1\neq a'_1, b_2\neq b'_2,\cdots$ になるように選び，またこれら循環小数にならないよう選ぶことが出来ることに注意する。すると，α は，その決め方から，上記の自然数と対応付けられた実数のどれとも等しくないことが分かる。なぜなら，対角線に並んでいる数は，常に等しくないように選んでいるからである。しかし，全ての実数は，自然数と対応付けられていると仮定したので，矛盾が生じる。よって，$\#\mathbb{R}\neq\aleph_0$ が正しい。

以上によって，無限集合には種類があることが分かった。$\aleph_0$ を可算無限，可算無限より大

きい無限を非可算無限と言い，その集合を可算集合 · 非可算集合と言う。$\mathbb{R}$ 上有界な区間であっても，可算集合 · 非可算集合を部分集合に含むものが存在する。例えば，開区間や閉区間である。

例 2.1 は，この 2 種類の無限を使って関数を定義している。この関数のグラフを描こうと試みても，$y = x$ と x 軸の 2 つの直線を描かなければならない。これは，グラフを利用した直観で連続を扱う定義 2.1 に不具合が生じる例となっている。しかし，定義 2.2 を採用すると，例えば，次のような点列を考えることによって，不具合は生じない。$n \in \mathbb{N}$ として，

$$a_n = \frac{1}{n}, \quad b_n = \frac{1}{\sqrt{n}}$$

上記の点列の極限は，共に 0 であり，$\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{Q}, \{b_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$ である。この点列における関数の値の極限値は，

$$f(a_n) = \frac{1}{n} \to 0 \quad f(b_n) = 0 \to 0 \text{ as } n \to \infty$$

となり，原点での連続性が示せそうに思われる。また，原点以外での不連続性については，次の有理数の稠密性を用いればよい。

定理 3.1. $a < b\ (\forall a, b \in \mathbb{R})$
$\Rightarrow \exists x \in \mathbb{Q}$ such that $a < x < b$

この定理は，任意の無理数は，必ず有理数で近似列を構成できることを示している。

しかし，定義 2.2 を用いても，連続性を確認できない関数が存在する。

例 3.5. 次の関数は，x が無理数 $\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$ と 0 で連続である。

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{q} & \text{for } x = \dfrac{p}{q} \in \mathbb{Q} \\ 0 & \text{for } x \in (\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}) \cup \{0\} \end{cases}$$

この例 3.5 を示すには，定義 2.3 と定理 3.1 を用いて，厳密に扱わなければならない。定義 2.2 で，無理数での連続性は確認できる。実際，無理数 α を

$$\alpha = \sum_{i=0}^{\infty} c_i \times 10^{-i} \quad c_0 \in \mathbb{Z},\ c_i \in [0, 9] \cap \mathbb{Z}$$

と 10 進法表記し，近似列としてこの部分和

$$a_n = \sum_{i=0}^{n} c_i \times 10^{-i}$$

を採用すれば，$a_n \to \alpha$ as $n \to \infty$，かつ $f(a_n) = 10^{-n} \to 0 = f(\alpha)$ as $n \to \infty$ が直観的に理解出来るであろう。次の例は初等関数 (連続関数) の極限で表記される関数だが，直観が働かない関数である。

例 3.6.

$$f(x) = \lim_{\nu\to\infty}\left(\lim_{k\to\infty}(\cos \nu!\pi x)^{2k}\right)$$
$$= \begin{cases} 1 & \text{for } x \in \mathbb{Q} \\ 0 & \text{for } x \in \mathbb{R}\setminus\mathbb{Q} \end{cases} \notin C(\mathbb{R})$$

f は，全ての点において不連続。得られる極限が不連続であることは，有理数の稠密性を用いて証明される。なお $C(A)$ は実数の部分集合 A で連続な関数全体を表す。

4. 有限からの近似

無理数を有理数で近似したように，無限や連続的なものを，有限や離散的なもので近似することはよく行われることである。しかし，3 章で見たように，無限を用いることで可視化出来ないような関数が構成できる。平成 23 年度指導要領において，単元身近な数学がある。この単元の中で，差分方程式が取り扱われることもあると思われる。この章では，常微分方程式と差分方程式の関係について述べる。

$$u'(t) = f(t, u)$$

を，1 階常微分方程式という。ここで，u は未知関数，t は変数である。この方程式の変数 t は連続的なものであるので，数値シミュレーションする際離散化する。例えば，

$$0 \le t \le T \Rightarrow 0, \Delta t, 2\Delta t, \cdots, n\Delta t = T$$

のように，点を n 等分するなどである。このとき，微分係数は，平均変化率を用いて

$$u'(i\Delta t) \simeq \frac{u((i+1)\Delta t) - u(i\Delta t)}{\Delta t}$$

または，

$$u'(i\Delta t) \simeq \frac{u(i\Delta t) - u((i-1)\Delta t)}{\Delta t}$$

と近似し，

$$\frac{u((i+1)\Delta t) - u(i\Delta t)}{\Delta t} \simeq f(i\Delta t, u(i\Delta t))$$
$$\Rightarrow u((i+1)\Delta t) \simeq u(i\Delta t) + f(i\Delta t, u(i\Delta t))\Delta t$$

を得る。これは，i に関する漸化式なので，$u(0)$ の値を定めることで，順次求まる。この点 $(i\Delta t, u(i\Delta t))$ をプロットし，ある種の補間を用いてグラフを繋げたものが，元の常微分方程式の近似解になっている。直観的には，得られたグラフが，近似解になっていることは理解できると思われるが，未知関数 u が満たす性質も未知であるため，自明ではない。直観的に，近似が正しいと思える根拠は次の定理であると推測される。

定理 4.1. $f \in C([a,b])$ かつ，開区間 (a,b) で微分可能とする。このとき，

$$\exists \xi \in (a,b) \text{ such that } f'(\xi) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$

である。

定理 4.1 は，数 III で取り上げられるものである。もし，u が，定理 4.1 の仮定を満たしているならば，

$$u'(\tau_i) = \frac{u((i+1)\Delta t) - u(i\Delta t)}{\Delta t}$$

を満たす，τ_i が，開区間 $(i\Delta t, (i+1)\Delta t)$ に存在する。さらに，導関数 u' が開区間 $(i\Delta t, (i+1)\Delta t)$ で連続であり，かつ，Δt が十分小さければ，近似 $u'(\tau_i) \simeq u'(i\Delta t)$，$u'(\tau_i) \simeq u'((i+1)\Delta t)$ が成立する。改めて，u に課した仮定は，$u \in C([0,T]) \cap C^1((0,T))$ である。なお $C^1(A)$ は実数の部分集合 A で 1 回連続的微分可能な関数全体を表す。

近似解であるとき，真の解との誤差を評価しなければならない。ここで簡単な例を考察する。

$$\begin{cases} \dfrac{d}{dt}u(t) &= Cu(t) \quad \text{for } t > 0 \\ u(0) &= u_0 \end{cases}$$

この方程式は，1 階線形常微分方程式と呼ばれ，簡単に厳密解が $u(t) = u_0 e^{Ct}$ と求まる。この方程式は，$C > 0$ であるとき，マルサス過程と呼ばれ最も単純な人口増加予測に用いられ，$C < 0$ であるとき，放射性物質の崩壊予測に用いられている。この方程式が，一意かつ滑らかな解が存在することは，別途証明が必要であるが，ここでは，それらを認めて，実際に厳密解と近似解の誤差を評価する。時間刻みを Δt とし，左辺を

$$\frac{u_{i+1} - u_i}{\Delta t} = Cu_i$$
$$\Rightarrow u_{i+1} = (1 + C\Delta t)u_i$$

が得られる。ここで，$u_i = u(i\Delta t)$ とした。この漸化式から，

$$u_i = (1 + C\Delta t)^{i-1} u_0$$

が得られる。ここで，ある時刻 $T > 0$ での誤差 $\varepsilon(T)$ を評価する。$[0,T]$ を，n 等分する，つまり $\Delta t = \dfrac{T}{n}$ とする。このとき，

$$\begin{aligned} \varepsilon(T) &= u(T) - u_n \\ &= u_0 e^{CT} - u_0 \left(1 + \frac{CT}{n}\right)^n \end{aligned}$$

となる。ここで分割数 n を $n \to \infty$ とすれば，

$$\begin{aligned} \left(1 + \frac{CT}{n}\right)^n &= \left(1 + \frac{CT}{n}\right)^{n/CT \cdot CT} \\ &\to e^{CT} \text{ as } n \to \infty \end{aligned}$$

となるので，実際に近似解になっていることが分かり，分割数を増やせば，誤差も小さくなることが分かる。また，Taylor の定理から，もし未知関数 u が 2 回微分可能かつ 2 階導関数が連続であるならば，

$$\begin{aligned} u_{i+1} &= u_i + u_i'\Delta t + \frac{u^{(2)}((i+\theta)\Delta t)}{2}(\Delta t)^2 \\ \Rightarrow &\left| \frac{u_{i+1} - u_i}{\Delta t} - u_i' \right| \le M\Delta t \end{aligned}$$

が分かる。ここで $M := \max_{\tau \in [0,T]} \left| \dfrac{u^{(2)}(\tau)}{2} \right|$ である。つまり，誤差のオーダーは，$O(\Delta t)$ as $\Delta t \to 0$ であることが分かる。このことから，時間刻みを小さくすれば小さくするほど真の解に近づくことがわかる。しかし，実際の数値計算においては，打ち切り誤差・丸め誤差が存在するため，時間刻みを小さくし過ぎると，却って近似の精度が下がる場合もあることが知られている。

5. 結び

高校数学で扱う関数を用いて，直観では連続性が理解しにくい例を紹介した。その例には，2 種の無限を用いて構成されていたため，可算無限と非可算無限について，簡単な紹介をした。これらは，非常に素朴に作られているため，高校生でも理解しやすいと思われる。

また，微分方程式の中で，最も単純と思われる1階線形常方程式を題材として，近似について取り扱った。この近似によって，自然対数の底である e について，再確認出来るものである。

参考文献

[1] 福原満洲雄編 (1954)「数学の教室　解析 II」実教出版

[2] 日本数学会 (2007)「数学辞典第四版」岩波書店

[3] 梅垣壽春 · 大矢雅則 (2001)「改訂版高等学校探求数学 III 教授資料」数研出版